FYSIKK OL 2024 - Norway

University of Stavanger

Analysis of experimental measurements - Theory

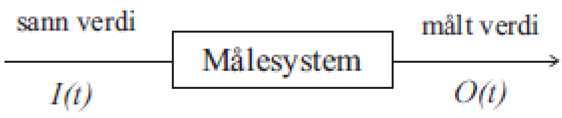
O. Zavorotynska

Innhold

1 Innledende beskrivelse

Vitenskap er basert på eksperimentelle målinger. Alle de eksperimentelle målingene er utsatt for en usikkerhet. Usikkerheter dukker opp fordi uansett hvor gode og presise metodene og instrumentene våre er, er de aldri perfekte. Dette fører til at det nesten aldri er mulig å vite den sanne verdien av den målte verdien. Teorien om usikkerhet lar oss estimere hvor nær vi kan vurdere vår målte verdi til den sanne verdien. Faktisk er en måling uten en usikkerhet meningsløs.

Et generelt målesystem kan angis med blokkdiagrammet:



Figur 1. Målesystem: $I(t)$ tilstand størrelse (Input), $O(t)$ måling (Output).

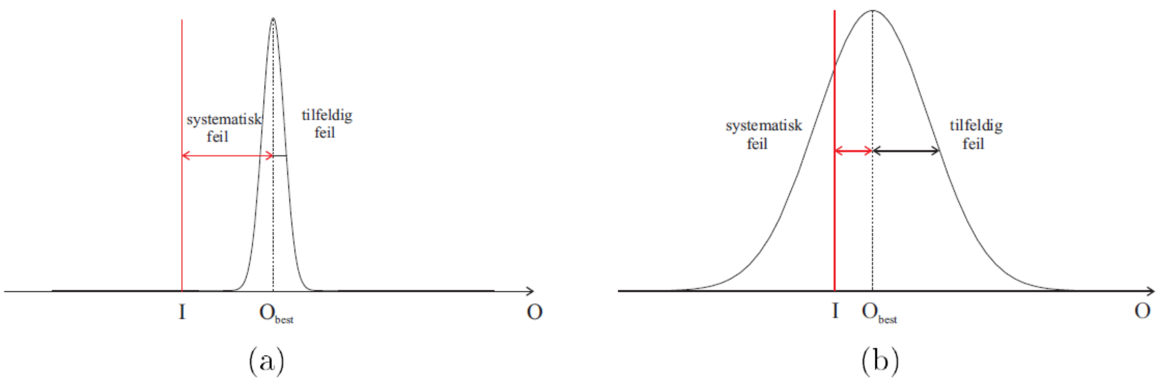
· **Tilstandsstørrelse:** Fysisk egenskap som karakteriserer systemet en ønsker informasjon om.

Det ideelle kravet må bli at $O(t) = I(t)$, men pga. *begrenset nøyaktighet*, **systematiske** / **tilfeldige** påvirkninger og feil, så må det ideelle kravet erstattes med:

$$|O(t) - I(t)| \leq \epsilon \qquad (1)$$

Vi ønsker at **feilen** ϵ skal være så liten som nødvendig.

Kravet til ϵ avhenger av formålet ved målingen. Når en i forkant har spesifisert ϵ, så vil dette påvirke valget av målesystem/måleprosedyre. Dersom målinger skal nyttes for å sammenligne / trekke konklusjoner, er det viktig at størrelsen av ϵ ikke forhindrer oss i å skille mellom to reelt ulike tilstandsverdier.



Figur 2. Normalfordeling av måleresultater i måleserier av en gitt størrelse. a) En situasjon der en har oppnådd god **presisjon** (intern konsistens), men dårlig **nøyaktighet** (den *målte verdien* $O(t)$ er ikke i samsvar med *den sanne verdien* $I(t)$, da sier vi, vi har en stor **systematisk feil** og **signifikant avvik**). b) Stor spredning av måleresultatene. Usikkerhet grunnet *tilfeldige feil* kan estimeres fra fordelingen av måleresultatene.

En generell problemstilling som vi møter er følgende:

Hva er tilstandsstørrelsens sanne verdi?

Vi vil innta en praktisk holdning: **Tilstandsstørrelsens sanne verdi** er den som oppnås ved bruk av det målesystemet som har størst nøyaktighet.

Ved måling av en tilstandsstørrelse må en alltid angi en enhet som referanse til måltallet:

Størrelse = Måltall × Enhet   symbolsk : A = {A} × [A]

Eksempel:

$$\rho_{\mathrm{Mn}} = 7.43\,\mathrm{g/cm}^3$$

Vi trenger et sett med fundamentale enheter som også kan nyttes til å utlede alle tenkelige måleenheter for gitte tilstandsstørrelser. Vanligvis, brukes **SI-enheter** overalt:

· **Grunnleggende enheter (SI base units** på engelsk**):**

1. Enheten for lengde, meter (1 m).

2. Enheten for masse, kilogram (1 kg).

3. Enheten for tid, sekund (1 s).

4. Enheten for elektrisk strøm, ampere (1 A).

5. Enheten for termodynamisk temperatur, kelvin (1 K).

6. Enheten for stoffmengde, mol (1 mol).

7. Enheten for lysstyrke, candela (1 cd).

· **Avledede enheter (SI derived units).**

Eksempler:

1. Enheten for kraft, newton, (1N = 1kg· m/s^2).

2. Enheten for energi, joule, (1 J = 1N· m).

3. Enheten for e_ekt, watt, (1W = 1J/s).

4. . . .

2 Rapportering og bruk av usikkerheter

I dette avsnittet skal vi introdusere noen standardbegreper: Emnets syntax eller språkbruk:

2.1 Beste estimat ± usikkerhet

Målt verdi av størrelsen *x* presenteres som:

$$x = (x_{\mathrm{best}} \pm \delta x)\,[x]\ . \tag{2}$$

Her er:

x_{best}	Beste estimat for x.
δx	Usikkerheten i målestørrelsen. δx er en positiv størrelse, omtales gjerne også som ubestemthet eller feil.
$[x]$	Måleenheten, **SI**-systemet legges til grunn.

Observatøren er altså rimelig sikker på at den korrekte verdien ligger i verdiintervallet $(x_{best} - \delta x, x_{best} + \delta x)[x]$

Eksempler:

$$
\begin{aligned}
l &= (2.1 \pm 0.1)\,\mathrm{m} \\
t &= (19.85 \pm 0.07)\,\mathrm{s} \\
g &= (9.8 \pm 0.2)\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

2.2 Antall gjeldende siffer

Antall gjeldende siffer til et (reelt) tall finnes ved å telle sifrene bakover fra og med første siffer forfra som er ulik null. Således har alle tallene i sekvensen: 217., 21.7, 2.17, 0.217, 0.0217, osv. 3 gjeldende siffer. I målesammenheng vil:

$$\boxed{\text{Eksperimentell usikkerhet normalt rundes av til ett gjeldende siffer.}}$$

En kan operere med maksimalt to gjeldende siffer i følgende situasjoner:

a) Første siffer i usikkerheten er 1 og andre siffer ≤ 5.

b) I målinger med spesielt høg nøyaktighet.

Eksempler:

$$
\begin{aligned}
l &= (2.18 \pm 0.23)\,\mathrm{m} & \Rightarrow \quad & l = (2.2 \pm 0.2)\,\mathrm{m} \\
t &= (9.93 \pm 0.14)\,\mathrm{s} & & \text{OK} \\
v &= (0.335 \pm 0.06)\,\mathrm{m/s} & \Rightarrow \quad & v = (0.34 \pm 0.06)\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Dette betyr at det siste gjeldende siffer i det beste estimatet av målestørrelsen, normalt skal være av samme størrelsesorden, dvs. være i samme desimale posisjon, som usikkerheten.

Merk (!):

· Dersom en vet at bare de fire første sifrene i massen *m* = 7630000 kg er

nøyaktige, kan dette indikeres ved å nytte såkalt vitenskapelig notasjon:

$$m = 7630000 \text{ kg} \Rightarrow m = 7.630 \times 10^6 \text{ kg}$$

· I mellomregninger kan en nytte ett ekstra gjeldende si_er. Avrunding

foretas til slutt.

· Advarsel til kalkulatorbrukere:

Det vises generelt altfor mange ikke-gjeldende siffer på kalkulatorens display.

Eksempel:

Ladningen på en kule er beregnet til $Q = 64.78 \times 10^{-6}$ C.

Hvordan skal en rapportere denne observasjonen når:

i) $\delta Q = 0.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$.

ii) $\delta Q = 2. \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$.

iii) $\delta Q = 0.03 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$.

Svar:

i) $Q_{measured} = (64.\mathbf{8} \pm 0.\mathbf{5}) \times 10^{-6}$ C
ii) $Q_{measured} = (65 \pm 2.) \times 10^{-6}$ C
iii) $Q_{measured} = (64.78 \pm 0.03) \times 10^{-6}$ C

Merk (!):

Her kan man se meningen med det vi sa tidligere: vi kan aldri vite den sanne verdien av den målte verdien og at målingen uten usikkerhet er meningsløs. Faktisk får du tre forskjellige resultater basert på usikkerheten i målingen: 64.8, 65, or 64.78×10^{-6} C

2.3 Signifikant avvik

Begrepet benyttes gjerne i de to følgende sammenhengene:

1. Ved sammenligninger av målinger på samme verdi:

$$x_A = x_A \pm \delta x_A \qquad x_B = x_B \pm \delta x_B$$

Dersom avviket:

$$|x_A - x_B| > (\delta x_A + \delta x_B)\ , \tag{3}$$

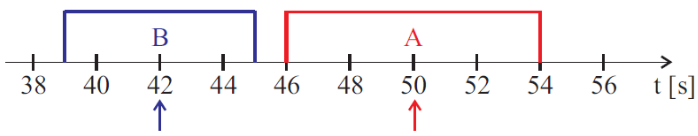
sies avviket å være signifikant: da har vi et **signifikant avvik** mellom de to målingene.

Eksempel:

Observatør A $\quad t_A = (50. \pm 4.)\,\mathrm{s}$
Observatør B $\quad t_B = (42. \pm 3.)\,\mathrm{s}$

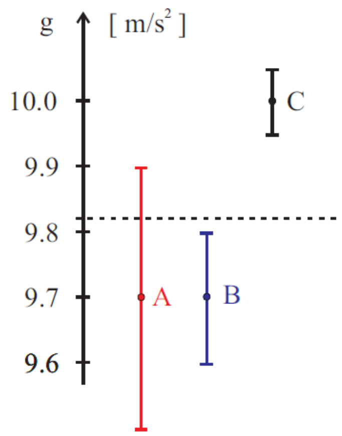
Vi ser at $|t_A - t_B| = |50. - 42.|\,\mathrm{s} = 8.\,\mathrm{s}$, mens $(\delta t_A + \delta t_B) = (4. + 3.)\,\mathrm{s} = 7.\,\mathrm{s}$.

Det følger fra ligning (2) at avviket mellom de to målingene er signifikant. Fra figur 3 ser vi at det svarer til ikke-overlappende verdiområder.



Figur 3.

2. Sammenligning av et måleresultat med en teoretisk (referanse) verdi, figur 4.



Figur 4. Tre målinger av tyngdens akselerasjon *g*. Sammenligning med forventet verdi 9.82 m/s^2. For observatørene B og C ligger den `sanne' verdien utenfor deres usikkerhetsestimat.

2.4 Relativ usikkerhet

La os ta utgangspunkt i presentasjonen:

$$(\text{målt } x) = x_{\text{best}} \pm \delta x .$$

Den relative usikkerheten er nå definert ved:

$$\text{Relativ usikkerhet} = \frac{\delta x}{|x_{\text{best}}|} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Prosentvis usikkerhet} &= \text{Relativ usikkerhet} \times 100\% \\ &= \frac{\delta x}{|x|} \times 100\% \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Eksempel:

Vi har følgende tidsmåling: $t = (42 \pm 3)$ s. Det følger da at

Den relative usikkerhet i t er: $\frac{\delta t}{t_{\text{best}}} = \frac{3}{42} = 0.07$.

Den prosentvise usikkerhet i t er: $0.07 \times 100\% = 7\%$.

Relativ usikkerhet gir oss mye bedre forståelse av målenes presisjon:

to målinger kan ha samme absolutte usikkerhet. For eksempel, er to resultater av målingen av tid t_1 = 10 s og t_2 = 100 s. I begge tilfeller er den absolutte usikkerheten 1 s. Men i den første målingen utgjør denne usikkerheten 10 % av den målte verdien, i den andre er den bare 1 %. Dermed er den andre målingen rett og slett "bedre" - mer presis - enn den andre.

3 Forplanting av usikkerhet

Når en skal foreta beregninger der det inngår målte størrelser, vil usikkerheten i disse gi opphav til en usikkerhet knyttet til den avledede størrelsen.

a) Usikkerhet i en sum / differanse:

Størrelsen q er gitt som summen av to (eller flere) målestørrelser *x* og *y* ($\ldots z$) hver med sin usikkerhet ($\delta x, \delta y$, ...)

$q = x \pm y \pm \cdots \pm z$, hvor:

$x_{measured} = x_{best} \pm \delta x$;

$y_{measured} = y_{best} \pm \delta y$;

$\ldots$

$z_{measured} = z_{best} \pm \delta z$.

Den **største mulig usikkerheten** er beregnet som en **sum av alle de absolutte usikkerhetene**:

$$\delta q = \delta x + \delta y + \cdots + \delta z \qquad (6)$$

I de fleste tilfeller kan usikkerheten finnes med «Pytagoras' læresetning» («pythagoras addition») i stedet:

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \cdots + (\delta z)^2} \qquad (7)$$

L. (6) brukes når målingene er avhengige (målt med samme instrument av samme person, for eksempel). Ligning 7 brukes oftere når målingene er uavhengige (målt av forskjellige personer med forskjellige instrumenter, osv.)

b) Usikkerhet i et produkt / divisjon:

Størrelsen q er gitt som multiplikasjon / divisjon av to (eller flere) målestørrelser *x* og *y* ($\ldots z$) hver med sin usikkerhet ($\delta x, \delta y$, ...)

$$q = x \times y \div \ldots \div z$$

Den **største mulig usikkerheten** er beregnet som en **sum av alle de relative usikkerhetene**:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} + \cdots + \frac{\delta z}{|z_{best}|} \qquad (8)$$

I de fleste tilfeller kan usikkerheten finnes med «Pytagoras' læresetning» («pythagoras addition») i stedet:

$$\frac{\boldsymbol{\delta q}}{|\boldsymbol{q_{best}}|} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\delta x}}{|\boldsymbol{x_{best}}|}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\boldsymbol{\delta y}}{|\boldsymbol{y_{best}}|}\right)^{\mathbf{2}} + \cdots + \left(\frac{\boldsymbol{\delta z}}{|\boldsymbol{z_{best}}|}\right)^{\mathbf{2}}} \qquad (9)$$

På samme måte som i usikkerheten i en sum / differanse, L. (8) brukes når målingene er avhengige (målt med samme instrument av samme person, for eksempel). Ligning 9 brukes oftere når målingene er uavhengige (målt av forskjellige personer med forskjellige instrumenter, osv.)

I det videre vil vi sløyfe indeksen best knyttet til måleverdien, som indikator for vårt beste estimat. Vi presenterer derfor en måleverdi som $x = (x \pm \delta x)\,[x]$. Det vil aldri oppstå noen misforståelse knyttet til tolkningen av x: Størrelse-symbol eller beste estimat.

Eksempel:

Elektrisk effekt (P) er gitt som produktet av spenningen (U) og strømstyrken (I):

$$P = U \cdot I$$

Følgende målinger foreligger:

$$U = (4.0 \pm 0.2)\,\mathrm{V} \qquad \text{og} \qquad I = (0.34 \pm 0.01)\,\mathrm{A}$$

Det følger at

$$\begin{aligned} \frac{\delta P}{P} &= \frac{\delta U}{U} + \frac{\delta I}{I} \\ &= \frac{0.2}{4.0} + \frac{0.01}{0.34} = 0.05 + 0.029 = 0.079 \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} P &= (4.0 \cdot 0.34)\,\mathrm{W} = 1.36\,\mathrm{W} \\ \delta P &= 1.36\,\mathrm{W} \cdot 0.079 = 0.108\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Korrekt avrunding leder da frem til følgende presentasjon av den elektriske effekten:

$$P = (1.36 \pm 0.11)\,\mathrm{W}$$

Merk at $\delta P = 0.11\,\mathrm{W}$ representerer øvre skranke for usikkerheten i effekten. Vi ser også at resultatet er i samsvar med:

$$\begin{aligned} P_{\text{max}} &= U_{\text{max}} \cdot I_{\text{max}} = (4.2 \cdot 0.35)\,\mathrm{W} = 1.47\,\mathrm{W} \\ P_{\text{min}} &= U_{\text{min}} \cdot I_{\text{min}} = (3.8 \cdot 0.33)\,\mathrm{W} = 1.25\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Ved bruk av ligning (5):

$$\begin{aligned} \frac{\delta P}{P} &= \sqrt{\left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.2}{4.0}\right)^2 + \left(\frac{0.01}{0.34}\right)^2} \\ &= \sqrt{0.0025 + 0.000865} \approx 0.058 \end{aligned}$$

Slik at

$$\delta P = 1.36\,\mathrm{W} \cdot 0.058 = 0.079\,\mathrm{W} \approx 0.08\,\mathrm{W}$$

Og vi presenterer $P = (1.36 \pm 0.08)\,\mathrm{W}$.

c) Usikkerhet i en potens (og rot)

Usikkerheten i en potens (eller rot som regnes som en brøk av potens) kan utledes fra ligningen (9):

Hvis $q = x^n$ og *x* er en målt verdi med usikkerheten: $x_{measured} = x_{best} \pm \delta x$, da bestemmes usikkerheten i *q* som:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = |n| \frac{\delta x}{|x_{best}|} \qquad (10)$$

d) Usikkerhet i multiplikasjon / divisjon med nummer uten usikkerhet

… kan også utledes fra ligningen (9):

Hvis $q = Bx,$ og *x* er en målt verdi med usikkerheten: $x_{measured} = x_{best} \pm \delta x$, men B er en verdi uten usikkerhet da bestemmes usikkerheten i *q* som:

$$\delta q = |B|\, \delta x \qquad (11)$$

e) Usikkerhet i en funksjon

Generelt, hvis *q* er en funksjon av den målte verdien *x* med en usikkerhet δx, kan usikkerheten i *q* funnes som:

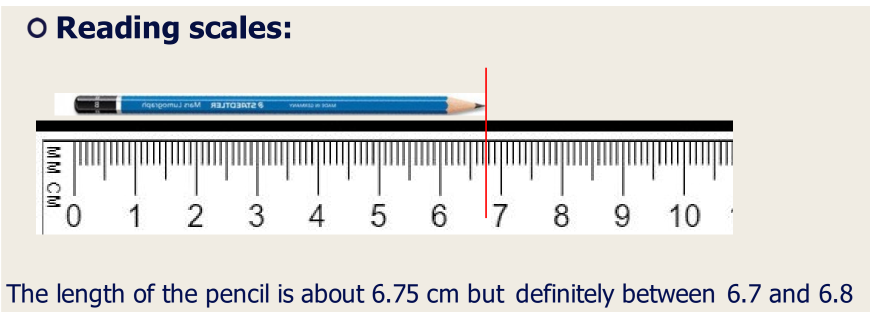
$$\delta q = |\frac{dq}{dx}| \delta x \qquad (12)$$

Merk(!) I trigonometriske funksjoner må alle usikkerhetene som måles i vinkler omregnes i radianer!

4 Usikkerhet ved direkte målinger

Parallax effekt - En form av skala-lesefeil som ofte rammer nybegynnere i vitenskapslaboratoriet, er unnlatelse av å justere øyet riktig med den delen av skalaen du leser. Dette gir opphav til **parallaksefeil**. Parallax refererer til endringen i den tilsynelatende posisjonen til et objekt når det sees fra forskjellige punkter.

Interpolasjon - er prosessen med å estimere posisjoner mellom skala markeringene. Det er alltid subjektivt og er dermed kilden til feil (figur 5).



Figur 5. Eksempel av interpolasjon ved avlesning av skala.

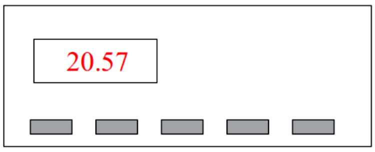
4.1 Systematisk usikkerhet

Systematisk usikkerhet er knyttet til selve målemetode elle måleutstyret. Eksempel kan være klokker som går for fort/sakte. Utstyr som anvendes under ytre betingelser (trykk/temperatur) som ikke er i samsvar med produsentens spesifikasjoner. Det som er typisk ved systematiske feil, er at de forskyver måleresultatet, *O*(*t*), enten til en større eller til en mindre verdi relativt den sanne tilstandsverdien $I(t)$. Systematiske usikkerheter derfor ikke kan reduseres med å gjenta målingene flere ganger med samme metoden og utstyret.

Generelt vil ethvert måleinstrument ha en kalibreringskarakteristikk. Kalibreringskurven viser at instrumentets utgangssignal, måleverdien, varierer innenfor noe grensene $\pm\, \delta\, O_{sys}$ om tilstandsverdien I. I vanlige eksperimenter bestemmes systematiske usikkerheter som kalibrering intervallet oppgitt av produsenten av instrumentet:

Eksempel:

Multimetermålinger – spenning:



Oppgitt fra datablad (`Simpson`): Spenning $\pm(0.1\,\% + 1\,\text{digit})$ av avlest verdi.

$$\begin{aligned} 0.1\,\% &\;:\; \frac{0.1}{100} \times 20.57\,\text{V} = 0.02\,\text{V} \\ 1\,\text{digit} &\;:\; 0.01\,\text{V}\,,\ \text{én i siste siffer} \end{aligned}$$

$$\delta V = \sqrt{(0.02)^2 + (0.01)^2}\,\text{V} = 0.02\,\text{V}$$

Mulige systematiske feil representerer en betydelig eksperimentell utfordring. De kan ikke «kontrolleres» eller «avsløres» ved statistiske metoder. Det er derfor viktig å være bevisst deres mulige (ubehagelige) eksistens. Nøyaktighet i planlegging og gjennomføring av målingene samt gode prosedyrer for vedlikehold og kalibrering av instrumentene som brukes, kan redusere deres innflytelse. Generelt, når en mulig systematisk feilkilde er identifisert, bør en prøve å finne et pålitelig estimat knyttet til dets størrelse.

4.2 Tilfeldige usikkerheter

Selv om måler vi noe samme størrelsen flere ganger, kan vi oppnå forskjellige resultater ved hver av målingene. For eksempel, her er en serie med 30 målinger av samme tidsintervall:

8.16	8.14	8.12	8.16	8.18	8.10	8.18	8.18	8.18	8.24
8.16	8.14	8.17	8.18	8.21	8.12	8.12	8.17	8.06	8.10
8.12	8.10	8.14	8.09	8.16	8.16	8.21	8.14	8.16	8.13

De forskjellene in målingene skyldes **tilfeldige feil**. Den tilfeldige feilen er forskjellen mellom en enkeltmåling og et stort antall målinger av den samme størrelsen, utført under de samme betingelsene. Tilfeldige usikkerheter oppstår på grunn av noen tilfeldige hendelser som skjer under forskjellige målinger. For eksempel å trykke på en knapp på en stoppeklokke litt raskere eller litt saktere i forskjellige målingene, tilfeldige mikrovibrasjoner i måleinstrumenter, et vindslag som påvirket en fallende gjenstand i en av mange målinger, og så videre. I sterk kontrast til den systematiske feilen, kan tilfeldige feil både overvurdere og undervurdere et måleresultat i en serie. Antall overvurderte og undervurderte resultater vil være omtrent likt hvis målingen gjentas mange ganger. Tilfeldige feil kan reduseres med å gjenta målingen flere ganger.

4.2.1 Middelverdi og standardavvik

Vi skal her introdusere noen statistiske størrelser som er høvelige for å kunne beregne beste estimat og tilhørende tilfeldige usikkerhet til en målestørrelse, *x*. Utgangspunktet er at vi har tilgjengelig et sett av måleverdier, $\{x_i\}$, i = 1, 2, . . . , *n*. Følgende størrelser defineres:

1. Middelverdien:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (13)$$

2. Standardavviket assosiert med:

(a) Enkeltmåling:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad (14)$$

(b) Standardavvik av middelverdien = tilfeldig usikkerhet nå middelverdien er brukt:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_x \qquad (15)$$

Når flere målinger av en gitt størrelse er utført, vil vi som beste estimat, x_{best}, nytte $x_{\text{best}} = \overline{x}$. For den tilfeldige feilen i det beste estimatet, δx_{tilf}, vil vi nytte $\delta x_{\text{tilf}} = \sigma_{\overline{x}}$. Det siste resultatet vil så bli kombinert med et estimat for den systematiske feilen, δx_{sys}, til en endelig verdi for usikkerheten i målestørrelsen, δx.

4.2.2 Vekting av data

Vekting av observasjoner (målinger) er aktuelt når vi skal kombinere flere separate, uavhengige verdier til en enkelt størrelse. La oss ta et eksempel fra måling av viskositetskoeffisenten η. Uavhengige målinger er foretatt av to grupper:

$$\begin{array}{lll} \text{Gruppe 1:} & \eta = \eta_1 \pm \delta\eta_1\,, & \eta = (1.20 \pm 0.05)\,\text{cP} \\ \text{Gruppe 2:} & \eta = \eta_2 \pm \delta\eta_2\,, & \eta = (1.10 \pm 0.08)\,\text{cP} \end{array}$$

Vi tilskriver dataene en observasjonsvekt, w_i:

$$w_i = \frac{1}{(\delta\eta_i)^2}$$

Vektet middel er nå definert ved:

$$\eta = \frac{w_1\,\eta_1 + w_2\,\eta_2}{w_1 + w_2}$$

For det gitte eksemplet finner vi da:

$$\eta = \frac{\left(\frac{1}{0.05}\right)^2 \cdot 1.20 + \left(\frac{1}{0.08}\right)^2 \cdot 1.10}{\left(\frac{1}{0.05}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.08}\right)^2} \, \mathrm{cP}$$
$$= \frac{400 \cdot 1.20 + 156.25 \cdot 1.10}{556.25} = 1.17 \, \mathrm{cP}$$

Usikkerheten i vektet middel kan bestemmes (etter standard regler for feilforplanting) som:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}} \tag{16}$$

Med endelig presentasjon:

$$(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) \, [x]. \tag{17}$$

Oppsummering:

Vektet middel bestemmes som:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{18}$$

Hvor vekten defineres som:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{19}$$

Og usikkerheten i en middelverdi er oppgitt som (16):

4.3 Total usikkerhet

Når begge systematisk og tilfeldig feil er bestemt, de kombineres i en total usikkerhet:

$$\delta k = \sqrt{(\delta k_{tilf})^2 + (\delta k_{sys})^2} \tag{20}$$

Og presenteres sluttresultatet på vanlig måte:

$$k = k_{best} \pm \delta k \tag{21}$$

4.4 Usikkerhet i «telle» eksperimenter

«Telle» eksperimenter er de der en `teller' hendelser som inntreffer tilfeldig, men med en bestemt midlere rate, $\lambda$. Tellingene kan for eksempel skje i et gitt tidsintervall, $\Delta t$. Registrering av røntgenfotoner som spres fra en krystall, er et eksperiment av denne typen. Detektorsystemet `omformer' fotonenergien til elektroniske pulser som registreres i en telle krets. Intensiteten, I, av røntgenstrålingen oppgis som antall tellinger pr. sekund: $[I] = s^{-1}$. Sann verdi av I svarer til λ. Det forventede antall tellinger i tidsintervallet Δt er gitt ved:

$$\mu = \lambda \, \Delta t \tag{22}$$

Ett eksperiment utføres der *k* pulser (hendelser) registreres i et bestemt tidsrom. Hvilken usikkerhet, δ *k*, vil vi assosiere med *k*? Resultatet er:

$$\delta k = \sqrt{k} \tag{23}$$

Aktuelt estimat for μ presenteres da som:

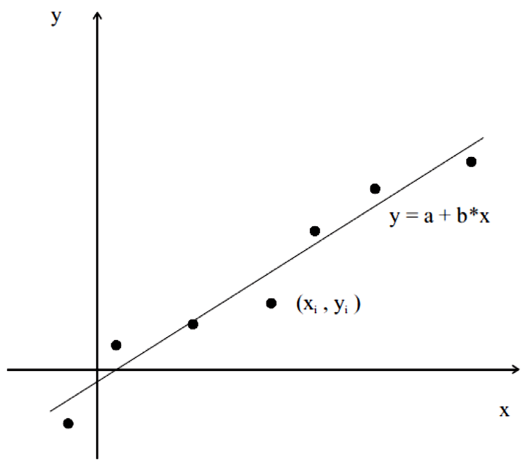
$$\mu = (k \pm \delta k) \tag{24}$$

Det fleste type av telle eksperimenter i fysikk laboratorium gjelder om telle partikler fra, for eksempel, en radioaktiv kilde eller kosmiske stråler.

5 Minste kvadraters metode og plotting av data

5.1 Lineær regresjonsanalyse

Målingene gir oss et sett av verdipar (punkter) $\{x_i, y_i\}$. Vi vil anta at det er en lineær sammenheng mellom *x* og *y*:



Figur 6. Tilpasning av et sett av punkter til en rett linje. *a* og *b* er estimatene for de sanne verdiene α og β knyttet til akseavskjæring og stigningstall.

Vår oppgave blir å finne de beste estimatene, *a* og *b*, for parameterne *α* og *β* i ligningen:

$$y = \alpha + \beta \cdot x \tag{25}$$

Dette gir en rettlinjet tilpasning til de eksperimentelle punktene. Den analytiske metoden som benyttes, går under betegnelsen **minste kvadraters metode** (**lineær regresjon**).

Koeffisientene *a* of *b* bestemmes fra datapunkter $\{x_i, y_i\}$ som:

$$a = \frac{\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i x_i\, y_i\right)}{n\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{n\left(\sum_i x_i\, y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)}{n\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)^2} \qquad (26)$$

Hvor n – er nummer av data parer $\{x_i, y_i\}$.

Usikkerhetene i a of b kan også bestemmes fra data:

$$(\delta a)^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta}\left(\sum_i x_i^2\right) \qquad (27)$$

$$(\delta b)^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta}\, n \qquad (28)$$

Hvor:

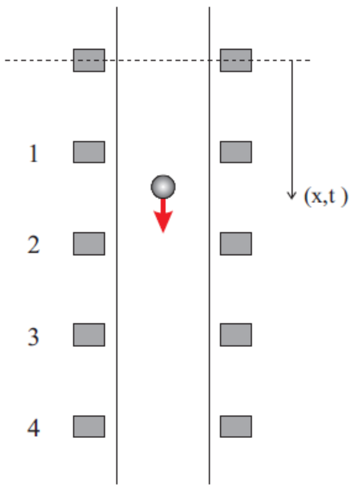
$$\Delta = n\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)^2 \qquad (29)$$

Og σ^2 =

$$\frac{1}{n-2}\sum_i \left[y_i - (a + b\, x_i)\right]^2 \qquad (30)$$

Eksempel

La oss studere fritt fall. En kule som faller under påvirkning av tyngdekraften alene :



Figur 7. Fall-eksperiment. Samhørige verdier av x og t måles.

De eksperimentelle data ønsker vi å analysere med utgangspunkt i ligningen:

$$\frac{x}{t} = v_0 + \frac{1}{2}gt$$

Vi har følgende observasjoner:

obs. nr.	t [s]	x/t [m/s]
1	0.1047	3.485
2	0.1877	3.889
3	0.2585	4.242
4	0.3215	4.548

Tabell 6: Data for fritt fall.

I henhold til det formelle formel-apparatet svarer nå t til x, mens x/t svarer til y.

Vi setter opp tabellen:

	x [s]	y [m/s]	x^2 [s^2]	$x\,y$ [m]	$y_i - (a + b\,x_i)$ [m/s]
	0.1047	3.485	0.010962	0.36488	0.00071
	0.1877	3.889	0.035231	0.72997	-0.00298
	0.2585	4.242	0.066822	1.09656	0.00225
	0.3215	4.548	0.103362	1.46218	-0.00121
$\sum_{i=1}^{4}$	0.8724	16.164	0.216377	3.65359	

Det følger fra ligningene (26) at:

$$\begin{aligned} a &= \frac{0.216377 \cdot 16.164 - 0.8724 \cdot 3.65359}{4 \cdot 0.216377 - (0.8724)^2}\,\mathrm{m/s} = \frac{0.310126}{0.104426}\,\mathrm{m/s} = 2.970\,\mathrm{m/s} \\ b &= \frac{4 \cdot 3.65359 - 0.8724 \cdot 16.164}{4 \cdot 0.216377 - (0.8724)^2}\,\mathrm{m/s^2} = 4.912\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Og fra ligningene (27-30):

$$\begin{aligned} \delta a &= 0.0028\sqrt{\frac{0.216377}{0.104426}}\,\mathrm{m/s} = 0.004\,\mathrm{m/s} \\ \delta b &= 0.0028\sqrt{\frac{4}{0.104426}}\,\mathrm{m/s^2} = 0.017\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Og ligningen vi trenger blir da til:

$$\frac{x}{t} = v_0 + \frac{1}{2}gt \quad \rightarrow \quad \frac{x}{t} = 2.970 + 4.912 \cdot t$$

Nå kan også tyngdens akselerasjon, $g = 2b$, bestemmes: $g = (9.82 \pm 0.03)\ \mathrm{m/s^2}$

5.2 Transformerte modeller

Ofte datamaterialet som er ikke-lineære må være modellert. Da ofte kan det transformeres over til lineær form. I uttrykkene nedenfor er aktuell transformasjon: ta den naturlige logaritmen, *ln*, av begge sidene av funksjonssammenhengen:

a) Potensfunksjon:

$$\begin{aligned} y &= \alpha\, x^{\beta} \ \Downarrow \text{transformeres} \\ \ln[y] &= \ln[\alpha] + \beta\, \ln[x] \ \Downarrow \text{omdøper} \\ y^{*} &= \alpha^{*} + \beta^{*}\, x^{*} \ : \ \text{lineær modell} \end{aligned}$$

b) Eksponensialfunksjon:

$$\begin{aligned} y &= \alpha\, \exp[\beta x] \ \Downarrow \text{transformeres} \\ \ln[y] &= \ln[\alpha] + \beta\, x \ \Downarrow \text{omdøper} \\ y^{*} &= \alpha^{*} + \beta^{*}\, x \ : \ \text{lineær modell} \end{aligned}$$

Etter datatransformasjonen kan en anvende minste kvadraters metode for en lineær modell til å bestemme estimater ($a^{\star}$, $b^{\star}$) med tilhørende usikkerheter ($\delta a^{\star}$, $\delta b^{\star}$) for de nye parameterne ($\alpha^{\star}$, $\beta^{\star}$). Deretter transformeres resultatene slik at estimatene (a, b) for de opprinnelige parameterne (α, β) etableres. Både for potensfunksjonen og eksponsialfunksjonen i representasjonen gitt ovenfor, vil:

$$\begin{aligned} (a, \delta a) &= (\exp[a^{\star}], \exp[a^{\star}] \cdot \delta a^{\star}) \\ (b, \delta b) &= (b^{\star}, \delta b^{\star}) \end{aligned}$$

References:

1) G. Thorkildsen, H. B. Larsen, FYS210 FYSIKKLABORATORIUM, Forelesningsnotater 2018, University of Stavanger.
2) J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, Third Edition, 2022, AIP publishing,*ISBN 978-1-940380-08-7.*

Norsk – engelsk ordboka:

Sann verdi – true value

Målt verdi – measured value

Usikkerhet – uncertainty

Feil - error

Avvik – discrepancy

Signifikant avvik – significant discrepancy

Systematisk usikkerhet – systematic uncertainty

Tilfeldig usikkerhet – random uncertainty

Relativ usikkerhet – relative uncertainty

Prosentvis usikkerhet – percentage uncertainty

Forplanting av usikkerhet – uncertainty propagation

Nøyaktighet – accuracy

Presisjon – precision

Normalfordeling – normal distribution